

# Streuung der Traglast von Kreiszyinderschalen unter kombinierter Belastung

Benedikt Kriegesmann<sup>1</sup>, Nikas Reuter<sup>1</sup>, Stefan Panek<sup>2</sup>, Tobias Hartwich<sup>2</sup>,  
Dieter Krause<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institut für Strukturmechanik im Leichtbau, Technische Universität Hamburg,

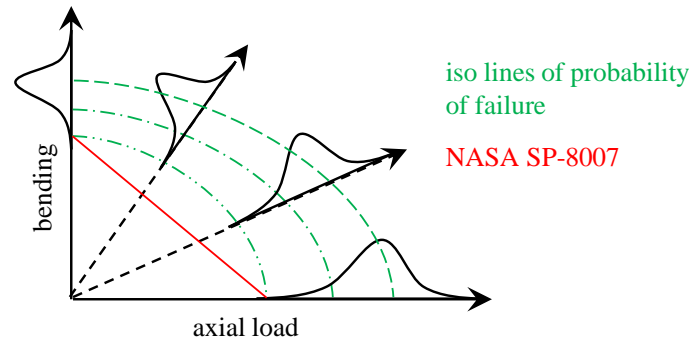
<sup>2</sup>Institut für Produktentwicklung und Konstruktionstechnik, Technische Universität Hamburg

**Zusammenfassung:** Der vorliegende Beitrag zeigt die Ergebnisse einer experimentellen Studie, in der für 22 Kreiszyinderschalen die Traglast unter kombinierter Axialdruck- und Biegebelastung ermittelt wurde. Während die Beullast unter reinem Axialdruck bekanntermaßen stark streut, kann sich diese Streuung mit zunehmender Biegebeanspruchung verändern. Für den Vergleich werden die Ergebnisse aus Last und Moment zu einem normierten Lastfaktor zusammengefasst und als Zufallsfeld betrachtet.

## 1 Einleitung

Das Beulverhalten axial belasteter zylindrischer Schalen ist ein im letzten Jahrhundert intensiv bearbeitetes Forschungsgebiet. Für eine Übersicht sei hier auf Bücher [9, 10] und Übersichtsartikel [4, 5] verwiesen. Ein Thema, das weitaus weniger Beachtung gefunden hat, ist das Beulen von Zylinderschalen unter kombinierter Belastung. Die meisten Veröffentlichungen, die sich mit Beulen bei kombinierter Beanspruchung befassen, betrachten die Kombination von Axialdruck und Innendruck, z. B. Hutchinson [6], Shen u.a. [8, 7], und Abramovich u.a. [3]. Der Innendruck ist jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Stattdessen liegt der Fokus auf der Kombination von Biegung und axialer Belastung.

Winterstetter und Schmidt [11] stellten eine große Anzahl von Versuchen, hauptsächlich an metallischen Schalen, vor, bei denen axialer Druck mit einem Biege- oder Torsionsmoment, bzw. ein Biegemoment mit Torsionsmoment kombiniert wurden. Die Ergebnisse zeigen eine starke Streuung mit qualitativ unterschiedlichen Kurvenverläufen der Beullast bei variierenden Lastkombinationen. In Bemessungsrichtlinien wird diese Wechselwirkung auf verschiedene Weise berücksichtigt. Während die NASA SP-8007 [1] von einer linearen Wechselwirkung ausgeht, berücksichtigt beispielsweise der Eurocode 3 [2] eine nichtlineare Interaktion, je nachdem, ob Axialdruck mit Biegung oder Axialdruck mit Torsion kombiniert wird.



**Abbildung 1:** Schematisches Interaktionsdiagramm der Beullast unter Axialdruck und Biegung

In der vorliegenden Arbeit wird eine experimentelle Studie vorgestellt, in der 22 isotrope Kunststoffzylinder unter verschiedenen Belastungskombinationen getestet wurden. Für den Vergleich der Ergebnisse, die Validierung der numerischen Simulationen sowie für die Interpretation der Ergebnisse wird ein neues Konzept vorgestellt, bei dem der Beullastfaktor als Zufallsfeld betrachtet wird.

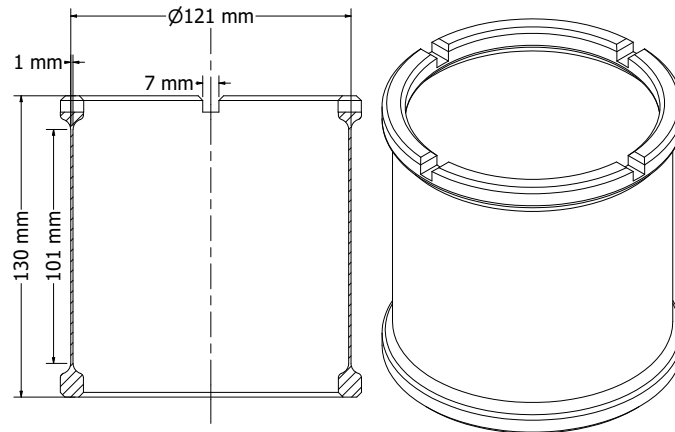
## 2 Experimentelle Untersuchungen

Im Rahmen dieser Studie wurden insgesamt 22 nominell identische, additiv gefertigte Kunststoff-Zylinderschalen untersucht. Es wurden Druckversuche unter unterschiedlichen Lastkombinationen bis zum Beulen der Schalen durchgeführt.

### 2.1 Herstellung der Zylinderschalen

Die Maße der Zylinder lassen sich der Abbildung 2 entnehmen. Die Schalen besitzen einen nominellen Radius von  $R = 60\text{mm}$ , eine nominelle Wanddicke von  $t = 1\text{mm}$  und werden über eine Länge von  $L = 100\text{mm}$  untersucht. Die Zylinderschalen wurden mit zwei 3D Druckern des Modells Form2 der Marke Formlabs hergestellt. Der Druck erfolgte dabei mittels Stereolithografie (SLA) Verfahren, bei dem flüssiges Harz durch einen Laser ausgehärtet wird. Als Material für den Druck wurde das durchsichtige Kunstharz (Clear Resin V4) der Firma Formlabs verwendet. Anschließend an den Druck wurden die Zylinder in einem Bad aus Isopropanol gereinigt und in dem Gerät Form Cure für eine halbe Stunde nachbehandelt. Der Form Cure härtet die Zylinder mit 405-nm-Licht bei einer Temperatur von  $60^\circ\text{C}$  aus.

Um die Zylinder zu untersuchen und die Geometrie zu erfassen, wurden die Schalen mit einem 3D Scanner des Modells ATOS Compact Scan der Marke Carl Zeiss GOM Metrology GmbH vermessen. Hierbei wird die tatsächliche Geometrie der Zylinder erfasst, indem die äußere und innere Fläche der Schale photogrammetrisch abgetastet wird. Diese Daten bilden die Grundlagen für die Realisierung der geometrischen Imperfektionen und für die Bestimmung der lokalen und globalen Wanddicke.



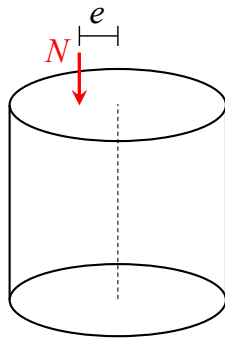
**Abbildung 2:** Modell der additiv gefertigten Zylinder

## 2.2 Versuchsaufbau

Die Durchführung der Beulversuche erfolgte an einer Universalprüfmaschine mit einer modifizierten Einspannvorrichtung. Die Zylinder wurden am unteren Rand in einer metallischen Einspannung fixiert, wie in Abbildung 4 dargestellt ist. Diese Vorrichtung verhindert eine Translation in radialer Richtung und beschränkt die Rotation der Zylinder um die eigene Achse an der unteren Einspannung. Die Krafteinleitung erfolgte punktuell über die obere Einspannung. Um eine multiaxiale Belastung zu erzeugen, wurde die Kraft mit unterschiedlichen, definierten Abständen (5mm, 10mm, 15mm, 20mm und 40mm) zur Mittelachse des Zylinders über eine Stahlplatte eingeleitet (siehe auch Abbildung 3). Durch die exzentrische Lasteinleitung wirkt neben der axialen Belastung ein Biegemoment auf die Schale, welches an der unteren Einspannung gemessen werden kann. Um die wirkenden Kräfte und Momente zu erfassen, wurde ein Mehrkomponentenaufnehmer der Firma Gassmann Theiss Messtechnik GmbH angebracht. Diese Kraftmessdose kann Kräfte und Momente in alle Raumrichtungen aufnehmen. Die Zylinder wurden bis zum Eintreten des Beulens getestet, welches sich durch einen plötzlichen, signifikanten Lastabfall äußert. Da die Zylinder im elastischen Bereich beulen, konnte jede Schale mehrfach getestet werden. Die Tests der Zylinder erfolgten in zufälliger Reihenfolge und mit Variation der Richtung der exzentrischen Lasteinleitung für jede Schale.

## 3 Numerische Simulation

Im Rahmen dieser Arbeit wurden numerische Untersuchungen der idealen Zylinderschale vorgenommen, um die durch Imperfektionen hervorgerufene Reduktion der Beullast quantifizieren zu können. Hierzu wurden Finite-Elemente-Analysen durchgeführt und die Beullast und das Beulmoment mittels Eigenwertanalyse bestimmt. Für das Modell wurden bilineare



**Abbildung 3:** Schematische Darstellung der exzentrischen Lasteinleitung.



**Abbildung 4:** Versuchsaufbau mit einem bereits getesteten und zerstörten Zylinder

Schalenelemente mit reduzierter Integration verwendet und die Axialkraft mit der entsprechenden Exzentrizität auf den oberen Rand des Zylinders aufgebracht. Der in den Simulationen verwendete Wert für den Elastizitätsmodul wurde aus den Last-Verschiebungskurven der Versuche mit zentrischer Belastung ermittelt. Der sich daraus ergebene Mittelwert wurde auf  $1800\text{MPa}$  gerundet.

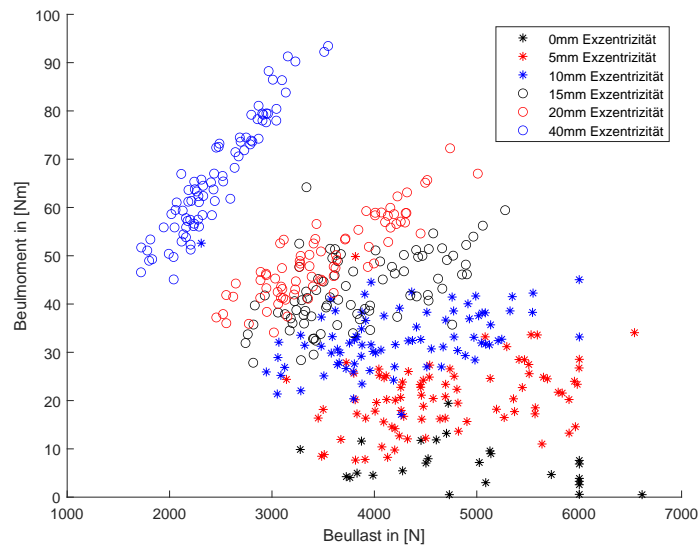
## 4 Ergebnisse

Die in den Versuchen erzielten Beullasten und Beulmomente sind in Abbildung 5 zusammengefasst. In Tabelle 1 sind Mittelwert und Standardabweichung von Beullast und Beulmoment für die untersuchten Exzentrizitäten gegeben. Entsprechend der Erwartungen nimmt bei größerer Exzentrizität der Krafteinleitung die Beullast ab und das Beulmoment zu.

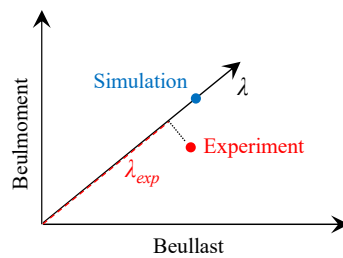
Um die für die verschiedenen Zylinder gefundenen Ergebnisse zu verallgemeinern, wird der Lastfaktor  $\lambda$  wie in Formel (1) eingeführt. Hierbei wird aus der gemessenen Beullast ( $BL$ ) und dem gemessenen Beulmoment ( $BM$ ) ein Vektor erstellt. Dieser wird, wie in Abbildung 6 dargestellt, auf den Vektor der idealen Beullast ( $BL_{perf}$ ) und dem idealen Beulmoment ( $BM_{perf}$ ) aus der Simulation einer perfekten Zylinderschale projiziert und normiert.

Exzentrizität	Mittelwert Beulmoment	Standardabweichung Beulmoment	Mittelwert Beullast	Standardabweichung Beullast
0 mm	6,74 Nm	4,46 Nm	4911,72 N	904,94 N
5 mm	20,73 Nm	7,09 Nm	4691,75 N	773,02 N
10 mm	32,82 Nm	6,18 Nm	4222,97 N	748,39 N
15 mm	42,82 Nm	7,34 Nm	3838,95 N	631,31 N
20 mm	49,49 Nm	8,18 Nm	3517,89 N	581,65 N
40 mm	66,41 Nm	11,93 Nm	2462,87 N	417,28 N

**Tabelle 1:** Mittelwert und Standardabweichung von Beulmoment und Beullast



**Abbildung 5:** Beulmoment dargestellt über Beullast für unterschiedliche Exzentrizitäten der Krafteinleitung



**Abbildung 6:** Bestimmung des Lastfaktors  $\lambda$  eines Versuchsergebnisses durch Projektion auf den Lastfaktor der idealen Zylinderschale

Exzentrizität	Mittelwert $\lambda$	Standardabweichung $\lambda$
0 mm	0,7152	0,1318
5 mm	0,7590	0,1251
10 mm	0,7649	0,1356
15 mm	0,7697	0,1269
20 mm	0,7781	0,1287
40 mm	0,7463	0,1264

**Tabelle 2:** Mittelwert und Standardabweichung von Lastfaktor  $\lambda$  über der Exzentrizität

$$\lambda = \frac{\sqrt{BL^2 + BM^2}}{\sqrt{BL_{perf}^2 + BM_{perf}^2}} \cdot \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{BM}{BL} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{BM_{perf}}{BL_{perf}} \right) \right) \quad (1)$$

Die Ergebnisse als Lastkombinationen sind in Abbildung 7 dargestellt. Mittelwert und Standardabweichung sind für alle Exzentrizitäten in Tabelle 2 zusammengefasst. Sowohl Mittelwert als auch Standardabweichung nehmen über die unterschiedlichen Exzentrizitäten sehr ähnliche Werte an. Die Darstellung in Abbildung 7 verdeutlicht, dass es sich bei der Verteilung der Beullast um ein eindimensionales Zufallsfeld handelt, dessen Koordinate die Exzentrizität ist. Ist dieses Zufallsfeld charakterisiert, so lässt sich für jede beliebige Exzentrizität die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Lastfaktors bestimmen, und so eine probabilistisch motivierte Bemessungsgrenze (z.B. das 1%-Quantil) bestimmen. Im vorliegenden Fall ändert sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht in Abhängigkeit der Koordinate. Es liegt somit ein stationäres Zufallsfeld vor. Mit dieser Erkenntnis lässt sich der Quantilwert für die getesteten Exzentrizitäten auch auf dazwischenliegende Exzentrizitäten übertragen.

Für einen steigenden Anteil des Biegemoments ist jedoch zu erwarten, dass sich der Mittelwert des Lastfaktors dem Wert eins nähert und die Standardabweichung sinkt. Für diesen Bereich müsste ein komplexeres Modell zur Beschreibung des Zufallsfeldes gewählt werden. Es lassen sich zwei potentielle, wesentliche Ursachen dafür identifizieren, dass dieser Effekt bei den im Rahmen dieser Studie untersuchten Zylinder nicht zu erkennen ist:

- Die getesteten Zylinder haben mit einem Verhältnis von  $R/t = 60$  eine sehr geringe Schlankheit, was bekanntermaßen zu einer geringen Sensitivität der axialen Beullast gegenüber geometrischen Imperfektionen führt. Der Einfluss von Dicken- und Materialschwankungen ist auf Beullast und Beulmoment ähnlich stark ausgeprägt.
- Der vorhandene Versuchsaufbau ermöglicht es nicht, Biegemomente ohne signifikante axiale Belastung aufzubringen. Die Kombinationen aus Axialkraft und Moment, die getestet werden konnten, besitzen allesamt einen sehr hohen Anteil der Axiallast.

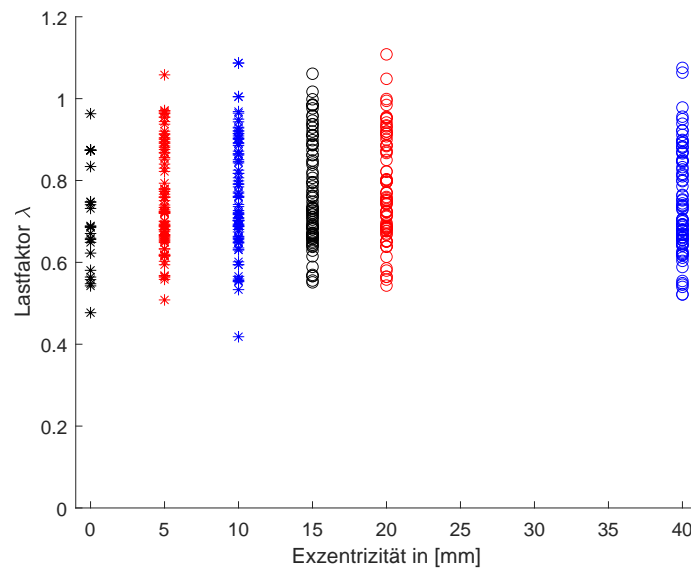


Abbildung 7: Lastfaktor  $\lambda$  dargestellt über Exzentrizität der Krafteinleitung

## 5 Schluss

Der vorliegende Beitrag demonstriert, wie die sich ändernde Verteilung der Traglast multiaxial belasteter Schalen infolge einer Variation der Lastkombination als Zufallsfeld aufgefasst werden kann. Im vorliegenden Fall ist die Exzentrizität der Lasteinleitung der Parameter, der die Koordinate dieses Zufallsfeldes repräsentiert. Aufgrund der geringen Schlankheit der getesteten Zylinder, und dem geringen Anteil des aufgebrauchten Biegemomentes verändert sich die Verteilung der Traglast mit zunehmender Exzentrizität kaum. Um den erwarteten Effekt einer sich ändernden Verteilung zu beobachten, werden in einer zukünftigen Studie Zylinder mit größerem  $R/t$ -Verhältnis getestet. Weiterhin werden deutlich größere Zylinder untersucht, die auf einer Hexapod-Prüfanlage getestet werden. Diese ist in der Lage, Moment und Axialkraft unabhängig voneinander aufzubringen und somit den ganzen Bereich möglicher Lastkombinationen abzudecken.

## Literatur

- [1] NASA: Buckling of Thin-Walled Circular Cylinders. 1968 (NASA SP-8007). – Forschungsbericht
- [2] CEN: General Rules: Strength and Stability of Shell Structures. Brussels, Belgium, 2007 (EN 1993-1-6). – Eurocode 3 Part 1.6
- [3] ABRAMOVICH, H. ; SINGER, J. ; WELLER, T. : Repeated buckling and its influence on the geometrical imperfections of stiffened cylindrical shells under combined loa-

- ding. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37 (2002), Jun., Nr. 4–5, 577–588. [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7462\(01\)00085-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00085-3). – DOI 10.1016/S0020-7462(01)00085-3. – ISSN 0020-7462
- [4] ARBOCZ, J. : Past, Present and Future of Shell Stability Analysis. In: *Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung* 5 (1981), Nr. 6, S. 335–348
- [5] ELISHAKOFF, I. : Uncertain Buckling: Its Past, Present and Future. In: *International Journal of Solids and Structures* 37 (2000), Nov., Nr. 46-47, S. 6869–6889. [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00318-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00318-2). – DOI 10.1016/S0020-7683(99)00318-2. – ISSN 0020-7683
- [6] HUTCHINSON, J. : Axial buckling of pressurized imperfect cylindrical shells. In: *AIAA journal* 3 (1965), Nr. 8, 1461–1466. <http://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/3.3169>
- [7] SHEN, H.-S. : Postbuckling of shear deformable cross-ply laminated cylindrical shells under combined external pressure and axial compression. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 43 (2001), Nov., Nr. 11, 2493–2523. [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7403\(01\)00058-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7403(01)00058-3). – DOI 10.1016/S0020-7403(01)00058-3. – ISSN 0020-7403
- [8] SHEN, H.-s. ; ZHOU, P. ; CHEN, T.-y. : Postbuckling analysis of stiffened cylindrical shells under combined external pressure and axial compression. In: *Thin-Walled Structures* 15 (1993), Jan., Nr. 1, 43–63. [http://dx.doi.org/10.1016/0263-8231\(93\)90012-Y](http://dx.doi.org/10.1016/0263-8231(93)90012-Y). – DOI 10.1016/0263-8231(93)90012-Y. – ISSN 0263-8231
- [9] SINGER, J. ; WELLER, T. ; ARBOCZ, J. : *Buckling Experiments: Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures*. Bd. 1. Wiley, New York, 1997
- [10] SINGER, J. ; WELLER, T. ; ARBOCZ, J. : *Buckling Experiments: Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures*. Bd. 2. John Wiley & Sons, Inc. <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9780470172995.fmatter/pdf>. - ISBN 978-0-470-17299-5
- [11] WINTERSTETTER, T. A. ; SCHMIDT, H. : Stability of circular cylindrical steel shells under combined loading. In: *Thin-Walled Structures* 40 (2002), Okt., Nr. 10, 893–910. [http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8231\(02\)00006-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8231(02)00006-X). – DOI 10.1016/S0263-8231(02)00006-X. – ISSN 0263-8231