

Quantifizierung polymorpher Unschärfen am Beispiel eines abgespannten Masts

Simon Marwitz¹, Volkmar Zabel² und Tom Lahmer¹

¹Bauhaus Universität Weimar, Institut für Strukturmechanik, Marienstr. 15, 99423 Weimar

²Universität Rostock, Professur für Baustatik und Baudynamik, Justus-von-Liebig-Weg 2, 18059 Rostock

Zusammenfassung: Bei der strukturdynamischen Modellierung treten Unschärfen aufgrund natürlicher Schwankungen (aleatorisch) und unvollständigen Wissens (epistemisch) auf. Am Beispiel eines abgespannten Mastes wird eine Methodik zu deren Quantifizierung vorgestellt. Die polymorphen Unschärfen von Eigenfrequenzen, Dämpfungswerten und Frequenzgängen erlauben Rückschlüsse auf die Wirksamkeit eines Schwingungsdämpfers und zeigen auf, wo vorhandenes Wissen vertieft werden sollte.

1 Einleitung

Im Ingenieurwesen müssen reale Strukturen oder Prozesse mathematisch oder numerisch modelliert werden, um ihr Verhalten zu prognostizieren und ihre Funktion oder Sicherheit zu bewerten. Die benötigten Informationen sind jedoch u. U. nicht vorhanden oder unpräzise, „sondern eher ungenau, diffus, schwankend, unvollständig, fragmentarisch, vage, mehrdeutig, zweifelhaft oder verbal und können einen datenbasierten, von Experten spezifizierten, objektiven oder subjektiven Hintergrund haben“ [10, übersetzt]. Die Parameter sind unscharf.

Die Modellierung von Unschärfe hängt von den verfügbaren Informationen ab und kann, in Abhängigkeit von der Informationsquelle, als aleatorisch oder epistemisch eingestuft werden. Aleatorische Unschärfe entsteht durch inhärente Variation oder Zufall und ist nicht reduzierbar. Epistemische Unschärfe ist bedingt durch fehlendes oder unvollständiges Wissen und kann durch Erwerb zusätzlichen Wissens verringert werden.

Diese Klassifizierung ist jedoch möglicherweise nicht ausreichend, um die zahlreichen oben zitierten Arten von Unschärfe zu modellieren. Einerseits kann ein Parameter von Natur aus variabel sein, aber für seine mathematische Modellierung, z. B. in einer probabilistischen Betrachtung, sind die Verteilungsparameter unbekannt. Andererseits können Parameter von

epistemischen Unschärfemodellen variable Komponenten haben. Der Begriff polymorphe Unschärfe wurde u.a. von [7] für Situationen geprägt, in denen Unschärfen verschachtelt oder gemischt auftreten. In diesem Zusammenhang werden die beiden obigen Beispiele als *Unvollständigkeit* und *Ungenauigkeit* bezeichnet.

Für die vorliegende Studie wurde eine Methodik zur Quantifizierung polymorpher Unschärfen von mathematisch-numerischen Modellen entwickelt und im Rahmen einer Fallstudie auf das numerische Modell eines abgespannten Mastes mit kreisförmigem Querschnitt (Abb. 1) angewendet. Diese schlanken, schwingungsanfälligen Strukturen sind in der Regel rauen Umweltbedingungen ausgesetzt, die naturgemäß unscharf sind. Darüber hinaus wurden viele dieser Bauwerke vor Jahrzehnten errichtet und haben zahlreiche strukturelle Änderungen erfahren. Neben Materialalterung und nachlassenden Vorspannkraften sind auch die Dämpfungseigenschaften unbekannt, was zu erheblichen Unschärfen bei der Modellierung führt.

2 Polymorphe Unschärfe: Modellierung, Fortpflanzung und Verarbeitung

Aleatorische Unschärfe wird in der Regel mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie abgebildet. Dabei werden etablierte Konzepte wie Ereignisse, Wahrscheinlichkeiten und Zufallsvariablen mit ihren diversen Verteilungsfunktionen verwendet. Die Beschreibung der Fortpflanzung aleatorischer Unschärfen erfolgt durch deterministische Funktionen oder Modelle unter Verwendung sample-basierter Methoden. In dieser Studie wird die Quasi-Monte-Carlo-Methode verwendet, um sogenannte low-discrepancy Sequenzen (Halton) der Eingabeparameter zu erzeugen. Da diese Sequenzen annähernd gleichverteilt sind, muss jede Stichprobe vor der Anwendung eines statistischen Schätzers mit Gewichten entsprechend ihrer Verteilungsfunktion gewichtet werden. Dies ermöglicht die Wiederverwendung bereits durchgeführter Berechnungen [9], wenn sich die zugrundeliegende Verteilungsfunktion ändert.

Epistemische Unschärfe liegt in Situationen vor, in denen das verfügbare Wissen unvollständig ist, es Zweifel, Unwissen oder sogar widersprüchliche Angaben gibt. Dies macht die Konstruktion eines kohärenten probabilistischen Modells unmöglich. In der vorliegenden Studie wurde die Evidenztheorie [13, 2] (engl. Evidence Theory) zur Modellierung epistemisch unscharfer Parameter gewählt. Das verfügbare Wissen wird modelliert, indem (nicht-elementaren) Ereignissen „Masse“ zugewiesen wird. Diese werden als fokale Mengen oder, im stetigen Fall, fokale Intervalle bezeichnet und können zu Belief-, Plausibility- und Commonality-Funktionen zusammengefasst werden. Die Fortpflanzung durch eine deterministische Funktion wird typischerweise durch Intervalloptimierung [5] erreicht. Aus dem kartesischen Produkt aller Intervalle der Eingangsgrößen bilden sich mehrere Hyperwürfel, in denen jeweils der größte und kleinste Wert der Ausgangsgröße bestimmt wird.

Polymorphe Unschärfen entstehen häufig, wenn Parameter gemischte oder verschachtelte aleatorische und epistemische Unschärfen aufweisen. Man unterscheidet dann *Ungenauigkeit* und *Unvollständigkeit*. In jedem Fall ist es wünschenswert, die Trennung zwischen aleatorischer und epistemischer Unschärfe zu erhalten. Modellierung und Fortpflanzung folgen den oben beschriebenen Verfahren. Die Verarbeitung von *Ungenauigkeit* erfordert die stochastische Analyse von Zufallsvariablen in einer äußeren Schleife und die Intervalloptimierung

von fokalen Intervallen in einer inneren Schleife. Die Verarbeitung von *Unvollständigkeit* erfordert die Intervalloptimierung in einer äußeren Schleife und die stochastische Analyse in einer inneren Schleife. In Situationen, in denen *unvollständige* und *ungenau* Variablen gemischt oder sogar verschachtelt sind, ist eine dreifache Schleife erforderlich: Intervallanalyse (*Unvollständigkeit*) - stochastische Analyse (*Variabilität*) - Intervallanalyse (*Ungenauigkeit*) - deterministische Analyse (mathematisches/numerisches Modell/Funktion).

Um diese Analysen in einer rechnerisch umsetzbaren Weise zu lösen, wurde eine Methodik entwickelt und umgesetzt. Sie ist in [8] beschrieben und erfüllt die folgenden Anforderungen: a) Unschärfemodellierung: epistemische, aleatorische und polymorphe Unschärfe, b) Geringe Anzahl von Auswertungen eines Modells mit mehreren Ausgangsgrößen bei gleichzeitiger Repräsentation seines globalen und lokalen Verhaltens (Berechnungseffizienz), c) Trennung von Fortpflanzung (Modellauswertungen) und Verarbeitung (Intervalloptimierung, statistische Schätzung) der Unschärfe, und c) Simultane Berechnung von Sensitivitätswerten.

3 Fallstudie: Unschärfen im strukturdynamischen Verhalten eines abgespannten Mastes

Zur Demonstration der entwickelten Methodik wurde ein Beispiel aus der Strukturdynamik, ein abgespannter Mast, gewählt (Abb. 1). Das Beispiel ist angelehnt an eine 200 m hohen abgespannten Stahlmast. Vereinfacht wird eine Abspannung in nur Ebene angenommen. Darüber hinaus ist ein Schwingungsdämpfer (*Tuned Mass Damper*) an der Spitze des Mastes installiert. Die Belastung folgt aus Eigengewicht (statische Stabilität wird angenommen), Wind und Vereisungen.

Die *Strukturmodellierung* basiert auf der Vereinfachung, Idealisierung und Linearisierung des ansonsten komplexen und nichtlinearen Tragverhaltens abgespannter Masten, wie in [15] beschrieben. Die äquivalente Federsteifigkeit der Pardunen k_{eq} wird aus dem Seilquerschnitt A_{cbl} und der Vorspannkraft N_{cbl} abgeleitet. Es wurde ein ellipsenförmiger Querschnitt mit leicht voneinander abweichenden Halbmessern gewählt, um eng beieinander liegende Eigenfrequenzen zu berücksichtigen. Eine modale Dämpfung ζ_{glob} wird unter Verwendung der Rayleigh-Parameter α und β auf die Eigenschwingungen 1...14 übertragen. Zusätzliche nicht-proportionale Dämpfung wird durch den Schwingungsdämpfer eingebracht, der nach dem in [12] beschriebenen Verfahren mit Masse m_D , Steifigkeit k_D und Viskosität d_D ausgelegt ist. Initiale Strukturparameter sind in Tab. 1 aufgeführt.

Die *Ausgangsgrößen* des Strukturmodells sind die Eigenfrequenzen f_j und Dämpfungsgrade ζ_j der $j = 1 \dots 14$ Eigenschwingungen (siehe Tab. 2). Weitere Ausgangsgröße ist der in 1024 Frequenzlinien bis 5 Hz diskretisierte Betrag der Akzeleranz zwischen Mastspitze (Anregungspunkt) und Dämpfer (Antwortpunkt). Da nichtproportionale Dämpfung vorliegt, werden die komplexen Eigenformen und ihre konjugierten Paare bei der Bestimmung der Frequenzgangfunktionen berücksichtigt [1].

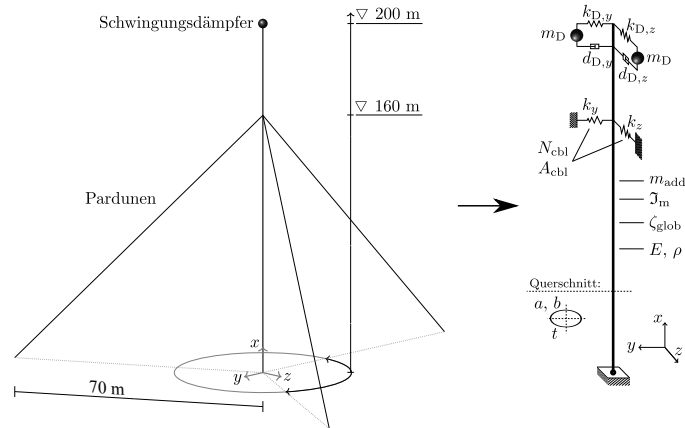


Abbildung 1: Vereinfachtes und linearisiertes Modell eines abgespannten Mastes mit Dämpfer

Mastrohr		Schwingungsdämpfer	
E	$= 2.1e11 \text{ N m}^{-2}$	$m_D =$	$\sim 1.5\% m_{total} = 800 \text{ kg}$
ρ	$= 7850 \text{ kg m}^{-3}$	$\kappa_{opt} =$	$\frac{1}{1 + \mu} = 0.966$
$A = \pi(ab - (a-t)(b-t))$	$= 3.382e-2 \text{ m}^2$	$\zeta_{D,opt} =$	$\sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}} = 10.9\%$
$I_y = \frac{\pi}{4}(ab^3 - (a-t)(b-t)^3)$	$= 1.36e-2 \text{ m}^4$	$f_D =$	$\kappa_{opt} f_1 = 0.180 \text{ Hz}$
$I_z = \frac{\pi}{4}(a^3b - (a-t)^3(b-t))$	$= 1.36e-2 \text{ m}^4$	$k_D =$	$(2\pi f_D)^2 m_D = 1025.48 \text{ N m}^{-1}$
I_{yz}	$= 0 \text{ m}^4$	$d_D =$	$2m_D 2\pi f_D \zeta_D = 197.61 \text{ N s m}^{-1}$
L	$= 200 \text{ m}$		
Abspannungen		Globale Dämpfung (Rayleigh-Modell)	
A_{cbl}	$= 7.54 \text{ cm}^2$	ζ_{glob}	$= 0.5\%$
N_{cbl}	$= 60 \text{ kN}$	$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_{14}\zeta_{glob}(\omega_1 - \omega_{14})}{\omega_1^2 - \omega_{14}^2}$	$= 8.52e-3$
$A_{eq} = \frac{A_{cbl}}{1 + \left(\frac{m g a}{N_{cbl}}\right)^2 \frac{EA_{cbl}}{12N_{cbl}}}$	$= 3.49e-4 \text{ m}^2$	$\beta = \frac{2\zeta_{glob}(\omega_1 - \omega_{14})}{\omega_1^2 - \omega_{14}^2}$	$= 1.88e-3$
$k_{eq} = (EA_{eq} \sin^2 \phi + N_{cbl}) \frac{1}{s}$	$= 6.78e4 \text{ N m}^{-1}$		
$k_z = 2 \sin(60^\circ) k_y$	$= 1.17e5 \text{ N m}^{-1}$		

Tabelle 1: Initiale Strukturparameter des Mastes und ihre Bestimmungsgleichungen

ϕ_j										
$f_{d,j} [\text{Hz}]$	0.172	0.173	0.189	0.190	0.341	0.360	0.671	0.674	1.390	1.395
$\zeta_j [\%]$	7.986	7.891	2.945	3.174	1.574	1.438	0.342	0.329	0.323	0.321

Tabelle 2: Eigenfrequenzen $f_{d,j}$, Dämpfungswerte ζ_j und Eigenformen ϕ_j (ohne Unschärfe).

Die *Unschärfemodellierung* basiert auf unterschiedlichen Quellen, darunter statischen Berechnungen und Zeichnungen einer ähnlichen Struktur, Normen und Standards, Literatur und der Erfahrung der Autoren. Alle Eingabeparameter und die Parameter ihrer Unschärfemodelle sind in Tab. 3 aufgeführt.

Die *Ergebnisse* wurden ermittelt, indem zunächst durch Intervalloptimierung für jede der 2076 Modellausgangsgrößen separat die fokalen Intervalle aufgrund von *Ungenauigkeit* bestimmt wurden. Anschließend wurden zwei statistische Schätzer angewendet: Mittelwert und kumulative Verteilungsfunktion. Letztere wurde für 40 Wahrscheinlichkeitsklassen $P = \{[0,0.025] \dots [0.975,1]\}$ bestimmt. Die Optimierungen der fokalen Intervalle aufgrund von *Unvollständigkeit* wurden dann für jede statistische Schätzgröße separat durchgeführt. Abschließend wurden die fokalen Intervalle zu Plausibilitätsfunktionen zusammengefasst.

Abbildung 2 zeigt Intervalle, die den wahren Wert der Ausgangsgröße enthalten und sollte nicht im probabilistischen Sinn einer Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden. Diese Intervalle sind durch unterschiedlich starke Evidenz (Ordinate) belegt. Die Unschärfen der mittleren Eigenfrequenzen umfassen einen relativ großen Bereich, sodass die Datenbasis für die Auslegung des Schwingungsdämpfers als unzureichend angesehen werden kann.

Bei der Interpretation dieses Diagramms ist zu beachten, dass die Ausgangsgröße aufgrund der *Variabilität*, die hier zu einem einzigen Wert (dem Mittelwert) zusammengefasst wurde, zu jedem beliebigen Zeitpunkt die fokalen Intervalle überschreiten kann. Es ist daher anzustreben, die Trennung zwischen aleatorischer und epistemischer Unschärfe in der graphischen Darstellung beizubehalten, z.B. in Form einer empirischen kumulativen Verteilungsfunktion. In Abb. 3 sind die Verteilungsfunktionen der Dämpfungswerte der Eigenschwingungen erster Ordnung dargestellt, wobei die aleatorische Unschärfe (*Variabilität*) auf der Ordinate und die epistemische Unschärfe (*Ungenauigkeit* und *Unvollständigkeit*) auf der Abszisse aufgetragen sind. Es zeigt sich, dass unter bestimmten Umständen, die durch die vorhandene Unschärfe begründet sind, eine deterministische Auslegung des Schwingungsdämpfers zu einer nicht ausreichenden Dämpfungskapazität führen kann. Die verbleibende epistemische Unschärfe sollte so weit wie möglich reduziert werden, indem zusätzliches Wissen über unscharfe Eingangsparameter gewonnen wird.

Abbildung 4 zeigt die Plausibilitätsfunktionen der mittleren Akzeleranz, die für jede Frequenzlinie separat geschätzt und zu einer einzigen grafischen Darstellung kombiniert wurden. Daraus kann abgeleitet werden, dass der Dämpfer die Schwingungen der Struktur in bestimmten Parameterkonstellationen auch ausreichend reduzieren kann, obwohl er unter deterministischen Annahmen entworfen wurde.

Param.	m	Art	Wert/Interv./Vert.	Einheit	Beschreibung / Quelle
E	–	Det.	$2.1e11$	N m^{-2}	Elastizitätsmodul
ρ	–	Det.	7850	kg m^{-3}	Massendichte
a	–	Det.	0.9	m	Halbachse des Querschnitts
b	1.0	Ung.	[0.85,0.95]	m	Halbachse des Querschnitts
t	0.8	Ung.	$[5.9e-3, 6.1e-3]$	m	Wandungstärke
	0.2	Var.	$\mathcal{N}(6e-3, 1e-4)$		
m_{add}	0.8	Ung.	[20, 100]	kg	Zusatzmasse (Plattformen, Kabel, Antennen, etc.) [6]
	0.2		[40, 50]		
N_{cbl}	–	Var.	$\mathcal{N}(\mu_N, 2655)$	N	Vorspannkraften Pardunen (Normalvert.)
μ_N	0.75	Det.	60000	N	Aufgebrachte Vorspannkraft
	0.25	Unv.	[40000, 180000]		
A_{cbl}	1.0	Ung.	[0.0007, 0.0008]	m^2	Querschnittsfläche der Pardunen
ζ	0.2	Ung.	[0.16, 1.5]	%	Globales Dämpfungsmaß: [14] Glob. Dämpf.: ger. / mittl. Schwing. [12] Glob. Dämpf.: ger. / hohe Schwing. [12]
	0.5		[0.75, 0.92]		
	0.3		[0.75, 1.34]		
d_D	–	Var.	$\mathcal{N}(197.61, \sigma_{d_D})$	N s m^{-1}	Dämpferviskosität
σ_{d_D}	0.8	Unv.	[10, 15]	N s m^{-1}	Temperaturabhängigkeit d. Silikonöls [11]
	0.2	Unv.	[5, 20]		
m_D	–	Det.	800	kg	Dämpfermasse
k_D	–	Det.	1025.48	N m^{-1}	Dämpfersteifigkeit
\mathcal{J}_{Pr}	0.3	Det.	0.077 26	–	Wahrscheinlichkeit von Vereisung [4]
	0.7	Unv.	[0.002 74, 0.211]	–	
\mathcal{J}_{occ}	–	Var.	$\mathcal{B}(\mathcal{J}_{\text{Pr}})$	–	Auftreten von Vereisung (Bernoulli Vert.)
\mathcal{J}_{m}	1.0	Ung.	$[50\mathcal{J}_{\text{occ}}, 100\mathcal{J}_{\text{occ}}]$	kg m^{-1}	Eismasse [3]

Tabelle 3: Eingangsparameter und ihre Unschärfemodelle.

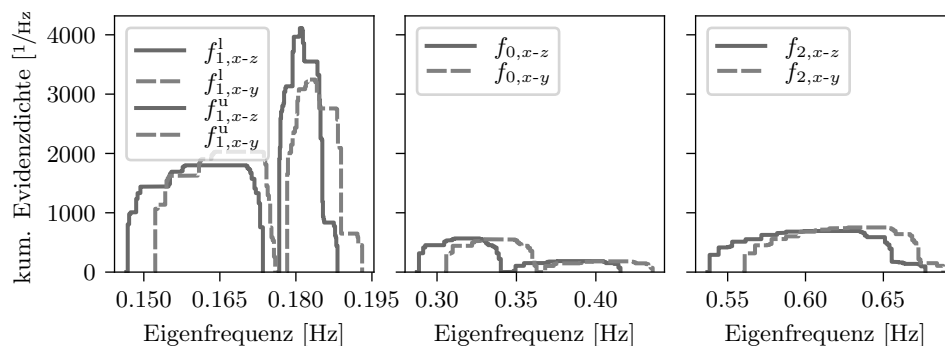


Abbildung 2: Plausibilitätsfunktionen der mittleren Eigenfrequenzen erster Ordnung (links), erster Ordnung mit Starrkörperschwingung (Mitte) und zweiter Ordnung (rechts) in jeweils zwei lateralen Biegerichtungen. Die Eigenschwingung erster Ordnung tritt jeweils doppelt auf, wobei der Dämpfer phasengleich bzw. -verschoben schwingt.

Danksagung

Für die Förderung des Forschungsprojekts *Bewertung und Reduzierung von Unschärfen bei der output-only Modalanalyse* (RUN-OMA) durch die Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) sowie die Anregungen aus dem DFG-Schwerpunktprogramm 1886 wird herzlich gedankt. Rechenressourcen wurden vom MaPaCC4-Cluster an der TU Ilmenau bereitgestellt.

Literatur

- [1] BRINCKER, R. ; VENTURA, C. : *Introduction to Operational Modal Analysis*. Wiley, 2015
- [2] DEMPSTER, A. P.: Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 38 (1967), Nr. 2, S. 325–339
- [3] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V (DIN) ; NONE (Hrsg.): *DIN EN 1991-1-3/NA:2019-04, Nationaler Anhang - National festgelegte Parameter - Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke - Teil 1-3: Allgemeine Einwirkungen*
- [4] DWD CLIMATE DATA CENTER (CDC) ; DWD (Hrsg.): *Jährliche Gebietsmittel der Eistage (Jährliche Anzahl) ($T_{min} < 0^\circ C$)*. 2022
- [5] ELDRD, M. ; SWILER, L. ; TANG, G. : Mixed aleatory-epistemic uncertainty quantification with stochastic expansions and optimization-based interval estimation. In: *Reliability Engineering and System Safety* 96 (2011), Nr. 9, S. 1092–1113
- [6] FELDMANN, M. : Türme und Maste. In: *Petersen Stahlbau*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2022, S. 1197–1297
- [7] GÖTZ, M. ; GRAF, W. ; KALISKE, M. : Structural design with polymorphic uncertainty models. In: *International Journal of Reliability and Safety* 9 (2015), Nr. 2/3, S. 112
- [8] MARWITZ, S. ; LAHMER, T. ; ZABEL, V. : Quantification of Polymorphic Uncertainties - A Quasi-Monte Carlo Approach [submitted]. In: *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering* (2023)
- [9] MOST, T. : Efficient structural reliability methods considering incomplete knowledge of random variable distributions. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 26 (2011), 4, Nr. 2, S. 380–386
- [10] MÖLLER, B. ; BEER, M. : Engineering computation under uncertainty - Capabilities of non-traditional models. In: *Computers and Structures* 86 (2008), Nr. 10, S. 1024–1041
- [11] PETERSEN, C. : *Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau*. Maurer Söhne GmbH und Co. KG, München, 2001. – 437 S.
- [12] PETERSEN, C. ; WERKLE, H. : *Dynamik der Baukonstruktionen*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017
- [13] SHAFER, G. : *A Mathematical Theory of Evidence*. Bd. 42. Princeton University Press, 1976
- [14] VEREIN DEUTSCHER INGENIEURE E. V. (VDI): *VDI 2038-2 Gebrauchstauglichkeit von Bauwerken bei dynamischen Einwirkungen*. 2013
- [15] ZABEL, V. ; MARWITZ, S. ; HABTEMARIAM, A. : Bestimmung von modalen Parametern seilabgespannter Rohrmasten. In: BISCHOFF, M. (Hrsg.) ; SCHEVEN, M. von (Hrsg.) ; OESTERLE, B. (Hrsg.) ; Baustatik Baupraxis e. V. (Veranst.): *Berichte der Fachtagung Baustatik-Baupraxis* Bd. 14. Universität Stuttgart : Institut für Baustatik und Baudynamik, 03 2020, S. 519–526